מבחן באלגברה 1מ׳
אביב תשס״ח מועד ב׳

מס סטודנט:_____ פקולטה:_____

- משך הבחינה שלוש שעות.
- במבחן 4 שאלות. יש לפתור את כל 4 השאלות ולנמק היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב! את כל הנימוקים יש לרשום בדפים אלה.
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	

ציון	

שאלת שעורי בית 4ג׳

$\overline{10}$

שאלה מס. 1 (30 נקודות)

תהי A המטריצה הממשית $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

א. מצא את הפולינום האופיני של A וכן את הערכים העצמיים שלה.

ב. האם A ניתנת ללכסון? אם לא, נמק מדוע לא, ואם כן נמק מדוע כן, ובנוסף מצא מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = D$.

רכוז תשובות

א. הפולינום האופייני של A

הערכים העצמיים של A

ב. כן / לא

אם כן $P =$, $D =$

שאלה מס 2 (30 נקודות)

יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהיו $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
נתונה טרנספורמציה לינארית T המקיימת $Tu_1 = 2w, Tu_2 = -5w$.

א. חשב את $T(-w)$ ואת $T(w)$.

ב. הוכח ש T^{18} איננה הפיכה.

יהי U מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 1:

$$U = \{ax + b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

נתונה טרנספורמציה לינארית $P : U \to U$ ע"י

$$P(x + 2) = x + 3 \quad , \quad P(2x + 1) = 5x + 15$$

ג. הוכח ש $Ker(P) = Im(P)$.

ד. הוכח ש $P^{15}(2009x + 2008) = 0$.

רכוז תשובות

א.

$Tw =$	$T(-w) =$

שאלה 3 (20 נקודות)

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. אם U וW הם תתי מרחב של מרחב וקטורי V עם בסיסים B_1 וB_2 בהתאמה אז $B_1 \cup B_2$ הוא בסיס של $U+W$.

ב. אם A ו B הן מטריצות ממשיות 7×7 המקיימות $ABABABA - A = 0$ אז A היא איננה הפיכה.

ג. אם A היא מטריצה מרוכבת 3×3 ו $2-i$ הוא שורש של הפולינום האופיני של A, אז ל A יש ערך עצמי ממשי עם רבוי גאומטרי 1.

ד. המטריצות הממשיות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ דומות זו לזו (מעל $\mathbb{R}$).

שאלה מס. 4 (20 נקודות)

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. יהיו $n \geq 7$, ו b מספרים טבעיים. אם A היא מטריצה ממשית $n \times n$ המקיימת $A^t = 3A + bI_n$ אז A^b ניתנת ללכסון.

כאן A^t היא המטריצה המוחלפת של A.

ב. אם A היא מטריצה ריבועית ממשית אנטיסימטרית ו$adj(A)$ הפיכה, אז $adj(A)$ אנטיסימטרית ו A הפיכה.

ג. אם T הוא אופרטור לינארי ב- $\mathbb{R}^3$ המקיים:

$$T(1,2,3) = T(4,5,6) = T(7,8,9) = (0,0,0)$$

אז T הוא אופרטור האפס.